

14.06.2019

Vektörel Analiz II Böl.

1) C eğrisi $\alpha(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ olduğuna göre $\int_C xy ds = ?$

2) $y = x^2$ parabolünün $(0,0)$ ve $(1,1)$ noktaları arasında yerleştirilen telin yoğunluğu $f(x,y) = x$ ise bu telin kütlesini bulunuz.

3) D bölgesinde tanımlı vektör alanı

$$F(x,y,z) = xy^2 \mathbf{i} + (x^2 - y) \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad C \text{ eğrisi ise}$$

$\alpha(t) = t^2 \mathbf{i} + t \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$ olsun. Buna göre

$$\int_C \vec{F} d\vec{\alpha} \text{ integralini hesaplayınız.}$$

4) $A(1,0,0)$ ve $B(0,1,0)$ noktalarından geçen doğru parçası üzerinde dik duran ve (x,y) taban noktasından yüksekliği $f(x,y) = xy^2$ olan duvarın yüzey alanını hesaplayınız.

Not: Sadece iki soru cevaplandırınız. Başarılar N.A. Gözümle!

$$1) ds = \|\alpha'(t)\| dt \Rightarrow ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt \Rightarrow ds = dt$$

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad \int_C xy ds = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

2) $\alpha(t) = (t, t^2)$ $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$ olur. Kütle = $\int_C f(x,y) ds$ dir.

$$ds = \|\alpha'(t)\| dt \quad ds = \sqrt{1+4t^2} dt \quad \text{Kütle} = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1+4t^2} dt = \frac{1}{8} \int_0^1 \sqrt{u} du$$

$$= \frac{1}{8} (1+4t^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (5^{\frac{3}{2}} - 1) \text{ olur.}$$

$$3) \vec{F} = xy^2 \mathbf{i} + (x^2 - y) \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

$$\alpha(t) = t^2 \mathbf{i} + t \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad x = t^2, y = t, z = 1 \text{ dr}$$

$$\int_C \vec{F} d\alpha = \int_0^1 (t^2 \cdot t^2 \mathbf{i} + (t^4 - t) \mathbf{j} + \mathbf{k}) (2t \mathbf{i} + \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}) dt$$

$$= \int_0^1 (2t^5 + t^4 - t) dt = \left. \frac{2}{6} t^6 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{2} t^2 \right|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{10+6-15}{30} = \frac{1}{30}$$

$$4) A(1,0,0), B(0,1,0) \text{ nok pene du}$$

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-0}{0-0} = t \Rightarrow x = -t+1, y = t, z = 0$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < t < 1 \text{ dr}$$

$$\text{Yüzey Alanı } \int_C f(x,y) ds = \int_0^1 (-t+1) t^2 \sqrt{2} dt$$

$$f(x,y) = xy^2 \quad \left| \begin{aligned} &= \sqrt{2} \int_0^1 (-t^3 + t^2) dt = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_0^1 \\ \alpha'(t) &= (-1, 1, 0) \quad \left| \begin{aligned} &= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{12} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$